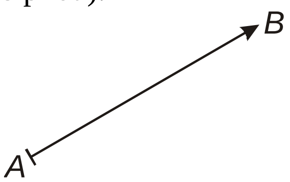
7.2.1 Vektory

Předpoklady: 7104

Některé fyzikální veličiny (například rychlost, síla) mají dvě charakteristiky:
- velikost,
- směr.

Jak je znázornit? Jedno číslo (jako například pro hmotnost $m = 55\,\mathrm{kg}$) nestačí.

Orientovaná úsečka: úsečka s vyznačeným počátečním a koncovým bodem (označený šipkou).



Na obrázku je orientovaná úsečka ***AB***:
- velikost: délka orientované úsečky,
- směr: směr orientované úsečky.

Nulové orientované úsečky: počáteční bod splývá s koncovým $\Rightarrow$ nulová velikost.

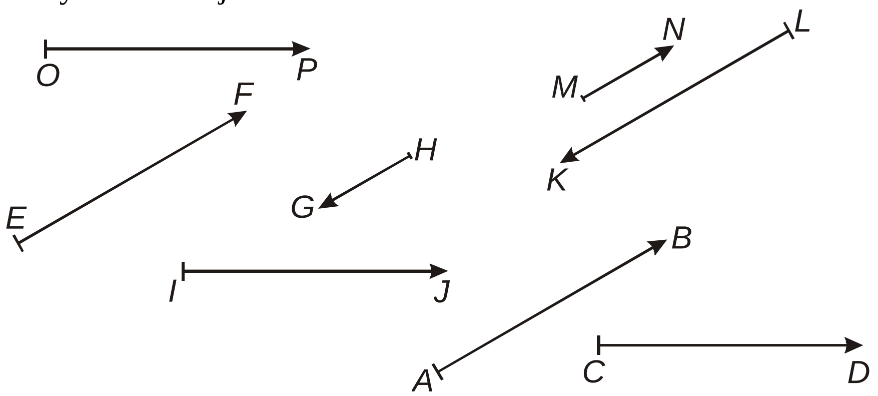
Orientovaná úsečka obsahuje víc informací než jenom velikost a směr, určuje i umístění (stejnou velikost a stejný směr má nekonečně mnoho shodných rovnoběžných úseček v různých místech roviny). $\Rightarrow$

Nenulový vektor *u* je množina všech orientovaných úseček, které mají stejnou velikost a stejný směr.
Nulový vektor je množina všech nulových úseček.

Dodatek: Podobně zavádíme: racionální číslo je množina všech zlomků, které je možné zkrátit do stejného základního tvaru ($\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{20}{30} = \frac{-14}{-21}$) $\Rightarrow$ racionální číslo není jeden konkrétní zlomek, ale to, co mají všechny shodné zlomky společné.
Stejně tak vektor není jedna konkrétní orientovaná úsečka (šipka), ale to, co mají společné všechny orientované úsečky se stejnou délkou a směrem.

Vektor zapisujeme dvěma způsoby: tučné malé písmeno $\boldsymbol{u}$, nebo malé písmeno se šipkou $\vec{u}$.

Př. 1: Rozhodni, které z orientovaných úseček na obrázku představují stejné vektory. Kolik různých vektorů je na obrázku znázorněno?



vektor $\boldsymbol{u}$ – orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{EF}$
vektor $\boldsymbol{v}$ – orientované úsečky $\boldsymbol{IJ}$, $\boldsymbol{CD}$, $\boldsymbol{OP}$
vektor $\boldsymbol{w}$ – orientovaná úsečka $\boldsymbol{LK}$
vektor $\boldsymbol{x}$ – orientovaná úsečka $\boldsymbol{HG}$
vektor $\boldsymbol{y}$ – orientovaná úsečka $\boldsymbol{MN}$
$\Rightarrow$ Osm orientovaných úseček znázorňuje pouze pět různých vektorů.

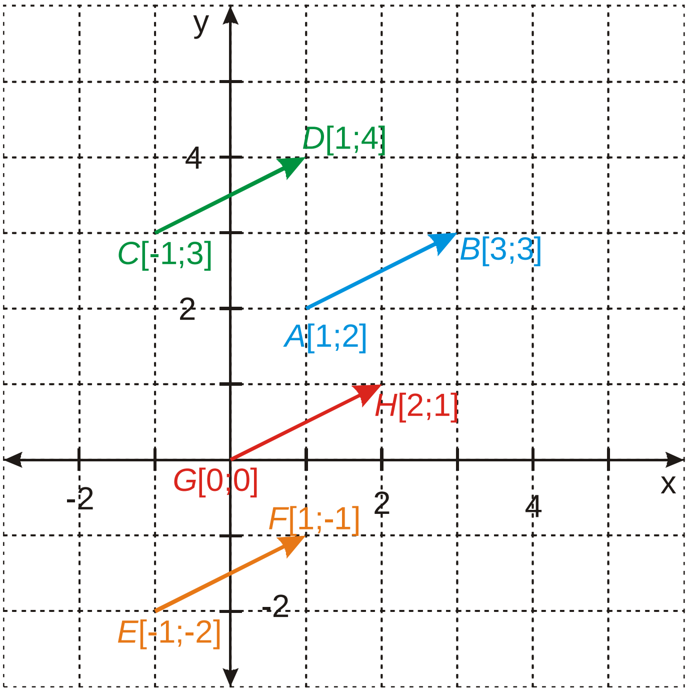
Libovolnou úsečku, která určuje vektor $\boldsymbol{u}$, nazýváme **umístění vektoru $\boldsymbol{u}$.**
U předchozího příkladu říkáme:

- orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{EF}$ jsou umístěním vektoru $\boldsymbol{u}$,
- umístěním vektoru $\boldsymbol{x}$ je orientovaná úsečka $\boldsymbol{HG}$,
- apod.

Často se mluví i o vektoru $\boldsymbol{AB}$. V takovém případě je třeba dávat pozor:

- orientovaná úsečka $\boldsymbol{AB}$ je svázána se dvě konkrétními body, nemůžeme ji umístit jinam,
- vektor $\boldsymbol{AB}$ je body A a B pouze reprezentován, můžeme ho umístit i kamkoli jinam (musíme však zachovat velikost a směr původní úsečky $\boldsymbol{AB}$**).**

Př. 2: V rovině je dán vektor $\boldsymbol{u}$ orientovanou úsečkou $\boldsymbol{AB}$ ($A[1;2]$, $B[3;3]$). Zakresli do obrázku umístění vektoru orientovanou úsečkou: a) $\boldsymbol{AB}$**,**
b) $\boldsymbol{CD}$, kde $C[-1;3]$, c) $\boldsymbol{EF}$, kde $F[1;-1]$, d) $\boldsymbol{GH}$, kde $G[0;0]$.
Která čísla charakterizují vektor $\boldsymbol{u}$? Jak je možné tato čísla vypočítat ze souřadnic krajních bodů libovolné orientované úsečky, která vektor představuje?



Všechna umístění vektoru jsme kreslili podle jednoho z krajních bodů tak, aby šipka představovala posun o dvě pole doprava a jedno pole nahoru. $\Rightarrow$ **Vektor charakterizují v rovině dvě čísla (posun ve vodorovném a posun ve svislém směru)** $\Rightarrow$ **mohli bychom psát** $\boldsymbol{u}=(2;1)$.

Posun z počátečního do koncového bodu orientované úsečky je určen tím, jak se od sebe liší souřadnice krajních bodů $\Rightarrow$ zkusíme souřadnice vektoru vypočítat jako rozdíl souřadnic:´

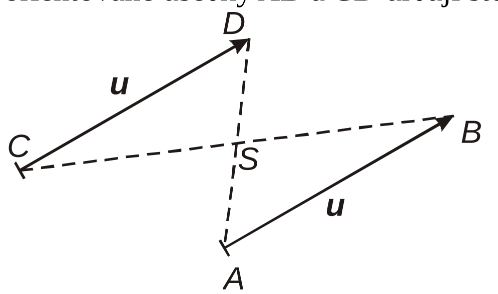
- $\boldsymbol{u}=B-A=[3;3]-[1;2]=(3-1;3-2)=(2;1)$,
- $\boldsymbol{u}=D-C=[1;4]-[-1;3]=(1-(-1);4-3)=(2;1)$,
- $\boldsymbol{u}=F-E=[1;-1]-[-1;2]=(1-(-1);-1-(-2))=(2;1)$,
- $\boldsymbol{u}=H-G=[2;1]-[0;0]=(2-0;1-0)=(2;1)$.

Postřeh: Čísla charakterizující vektor $\boldsymbol{u}$ z předchozího příkladu se shodují se souřadnicemi bodu *H* orientované úsečky *GH* (úsečky, která začíná v počátku soustavy souřadnic $\Rightarrow$ její počáteční bod má souřadnice $[0;0]$).

Př. 3: Orientovaná úsečka $\boldsymbol{AB}$ je dána body $A[a_1;a_2]$ a $B[b_1;b_2]$. Urči čísla charakterizující vektor určený touto orientovanou úsečkou.

Pouze obecně zapíšeme závěr předchozího příkladu. Vektor charakterizují dvě čísla, která popisují, jak jsme se posunuli z bodu *A* do bodu *B*. Tento posun odpovídá rozdílům souřadnic b_1-a_1 a b_2-a_2.

Vzorec pro výpočet souřadnic vektoru jde odvodit i exaktněji.
Vezmeme dvě umístění $\boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{CD}$ vektoru $\boldsymbol{u}$ na dvou různých rovnoběžných přímkách.
Orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{CD}$ jsou stejně dlouhé a navzájem rovnoběžné $\Rightarrow$ čtyřúhelník $ABDC$ je rovnoběžník.
Úhlopříčky ve čtyřúhelníku se půlí $\Rightarrow$ úsečky AD a BC mají společný střed.
Platí i obráceně: úsečky AD a BC mají společný střed $\Rightarrow$ čtyřúhelník $ABDC$ je rovnoběžník a orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{CD}$ určují stejný vektor.



Toto pravidlo platí i v případě, že obě orientované úsečky leží na stejné přímce.
$\Rightarrow$ Orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{CD}$ určují stejný vektor právě tehdy, mají-li úsečky AD a BC společný střed.
Předchozí větu zapíšeme vzorcem: $S_{AD} = S_{BC}$.
Předeme do jednotlivých souřadnic (zapíšeme rovnou i třetí souřadnici pro případ, že pracujeme v prostoru):

$\frac{a_1+d_1}{2} = \frac{b_1+c_1}{2}$	$\frac{a_2+d_2}{2} = \frac{b_2+c_2}{2}$	$\frac{a_3+d_3}{2} = \frac{b_3+c_3}{2}$
$a_1+d_1 = b_1+c_1$	$a_2+d_2 = b_2+c_2$	$a_3+d_3 = b_3+c_3$
$d_1-c_1 = b_1-a_1$	$d_2-c_2 = b_2-a_2$	$d_3-c_3 = b_3-a_3$

Tyto rozdíly už známe, získali jsme tak čísla, která nám charakterizovala vektor (souřadnice umístění vektoru s počátečním bodem v počátku soustavy souřadnic), říkáme jim **souřadnice vektoru**. Abychom rozlišili souřadnice vektorů a souřadnice bodů, píšeme souřadnice vektorů do kulatých závorek $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2) = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$.
Z exaktního odvození je také vidět, že **souřadnice vektoru nezávisí na orientované úsečce, kterou je určen** (pokud úsečky $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{CD}$ představují stejný vektor, tvoří jejich krajní body vrcholy rovnoběžníku $\Rightarrow$ platí $S_{AD} = S_{BC}$ $\Rightarrow$ platí $d_1 - c_1 = b_1 - a_1$, $d_2 - c_2 = b_2 - a_2$, $d_3 - c_3 = b_3 - a_3$).

Je-li vektor $\boldsymbol{u}$ určen orientovanou úsečkou AB, nazývají se čísla $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$ (případně v prostoru ještě $u_3 = b_3 - a_3$) souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}$. Píšeme $\boldsymbol{u} = B - A = (u_1; u_2)$ (případně $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$).

Př. 4: Jsou dány body $A[2;1]; B[4;2]; C[-1;-3]$. Urči vektory $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{BC}$ a $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{CA}$.

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB} = B - A = (4-2; 2-1) = (2;1)$ $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{BC} = C - B = (-1-4; -3-2) = (-5;-5)$
$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{CA} = A - C = (2 - [-1]; 1 - [-3]) = (3;4)$

Př. 5: Jsou dány body $A[-2;3;-7]$ a $B[4;-2;-1]$. Urči vektory $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{BA}$. Porovnej výsledky.

$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{AB}=B-A=(4-[-2];-2-3;-1-[-7])=(6;-5;6)$

$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{BA}=A-B=(-2-4;3-[-2];-7-[-1])=(-6;5;-6)$

Oba vektory mají opačný směr $\Rightarrow$ jejich souřadnice musí být navzájem opačné.

Př. 6: Je dán vektor $\boldsymbol{u}=(-2;3)$ a dvě jeho umístění $\boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{KL}$, $A[1;2]$, $L[-1;1]$. Urči souřadnice nezadaných bodů.

Souřadnice bodu $B[b_1;b_2]$.

Platí: $\boldsymbol{u}=(u_1;u_2)=(-2;3)=B-A=(b_1-a_1;b_2-a_2)$. Dosadíme:

- $-2=b_1-1 \Rightarrow b_1=-2+1=-1$
- $3=b_2-2 \Rightarrow b_2=3+2=5$

$B[-1;5]$

Souřadnice bodu $K[k_1;k_2]$.

Platí: $\boldsymbol{u}=(u_1;u_2)=(-2;3)=L-K=(l_1-k_1;l_2-k_2)$. Dosadíme:

- $-2=-1-k_1 \Rightarrow k_1=-1+2=1$
- $3=1-k_2 \Rightarrow k_2=1-3=-2$

$K[1;-2]$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti příklad spočítají zpaměti, přesto se snažím, aby si každý alespoň jeden z příkladů rozepsal do souřadnic. Celou kapitolu o vektorech je třeba dávat pozor na dvě věci:
Studenti musí vnímat, že souřadnice (bodů i vektorů) patří k sobě, teprve dohromady mají smysl, který využíváme a o kterém neustále mluvíme.
Studenti musí vědět, že v případě potřeby můžeme všechny vztahy, které používáme, rozepsat do souřadnic a řešit jako klasické rovnice. Výsledek však dává smysl pouze jako všechny souřadnice pohromadě.

Pedagogická poznámka: Snažím se v hodině postupovat tak, abych stihl látku k tomuto místu. Zbytek hodiny by sice logicky patřil na její začátek, ale k pochopení podstaty vektorů není nutný, naopak studenty spíše odvádí od toho důležitého. Navíc stejnou problematikou se učebnice zabývá už v první hodině o posunutí.

Jak poznáme stejnou velikost?
Jasné - spočítáme vzdálenost krajních bodů.

Jak poznáme stejný směr?
Pohledem jednoduché, ale matematicky těžké.

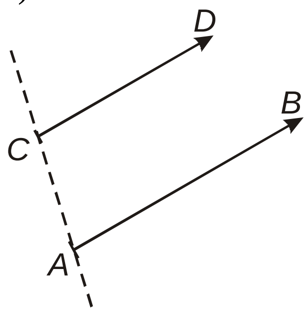
Dvě nenulové orientované úsečky ***AB*** a ***CD*** mají **stejný směr**, jestliže:

- přímky *AB* a *CD* jsou rovnoběžné, různé a body *B*, *D* leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou *AC*,

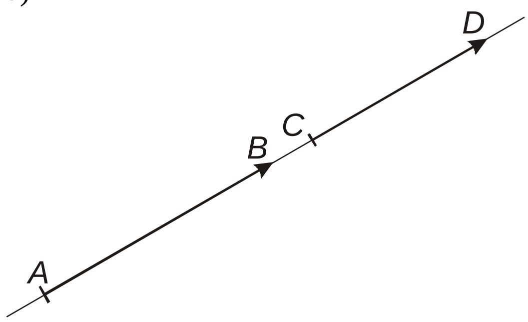
- přímky *AB* a *CD* jsou totožné a průnikem polopřímek *AB* a *CD* je opět polopřímka.

Př. 7: Nakresli dvojici orientovaných úseček ***AB*** a ***CD***, tak aby obě orientované úsečky měly různou velikost a splňovaly:
a) první z podmínek pro stejný směr orientovaných úseček,
b) druhou z podmínek pro stejný směr orientovaných úseček.

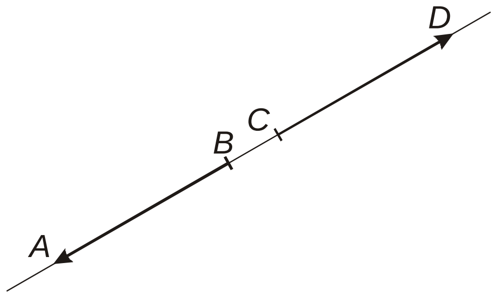
a)



b)



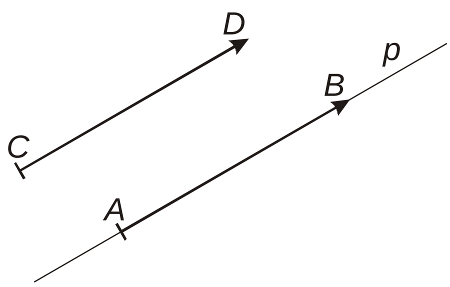
Př. 8: Nakresli dvojici orientovaných úseček ***AB*** a ***CD***, tak aby obě orientované úsečky měly stejnou velikost, přímky *AB* a *CD* byly totožné a průnikem polopřímek *AB* a *CD* nebyla polopřímka. Jak bys nazval jejich směry?



Směry orientovaných úseček bychom mohli nazvat opačné.

Pedagogická poznámka: Předchozí dva příklady slouží hlavně k tomu, aby studenti vůbec vnímali předchozí definici stejného směru. S variantou b) mají podstatně větší problémy. Zajímavé mně přijde, že téměř všichni kreslí situaci tak, aby splynuly body *B* a *C*.

Jestliže vektor ***u*** můžeme určit orientovanou úsečkou ***AB***, která leží na přímce *p*, říkáme, že vektor ***u*** leží na přímce *p* (spíše to však znamená, že má stejný směr jako přímka, protože ho můžeme určit i orientovanou úsečkou ***CD***, která na přímce neleží).



Nulový vektor leží na každé přímce.

Jakou podmínku musí splňovat vektor ***u***, abychom mohli tvrdit, že leží v rovině ρ ?
Vektor ***u*** můžeme určit orientovanou úsečkou ***AB***, která leží v rovině ρ .

Př. 9: Petáková:
strana 99/cvičení 1 a) b) c)
strana 99/cvičení 2

Shrnutí: Vektor je množinou orientovaných úseček. Zachycuje pouze velikost a směr, ne umístění. Jeho souřadnice získáme rozdílem souřadnic koncových bodů.